BAB I. KINEMATIKA DENGAN ANALISIS VEKTOR

1.1. PERSAMAAN GERAK

Benda dikatakan bergerak jika posisi benda tersebut berubah terhadap suatu titik acuan. Untuk mempermudah mempelajari konsep gerak suatu benda, maka gerakan benda tersebut dinyatakan dalam suatu persamaan matematika yang disebut *persamaan gerak.* Pembahasan akan ditekankan pada hubungan vector, turunan fungsi dan integral fungsi dari suatu persamaan yang menyatakan posisi, kecepatan dan percepatan dari suatu benda yang bergerak. *Karena posisi benda berada pada suatu titik, maka benda yang dimaksud dalam bab ini adalah benda titik.*

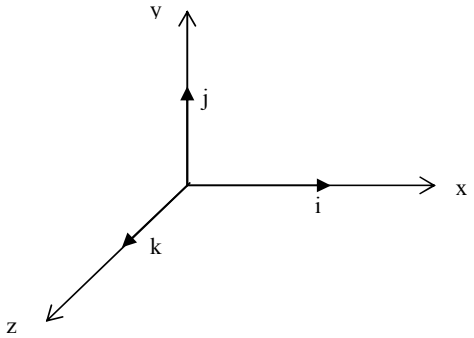
1. Persamaan Posisi

Posisi dari benda titik dinyatakan dalam bentuk vektor. Berikut ini akan dijelaskan mengenai vektor satuan dan vektor posisi.

a. Vektor Satuan

Vektor satuan adalah vector yang nilainya (besarnya) satu satuan . Dalam ruang ada tiga vector satuan yaitu:

i dalam arah sumbu x
j dalam arah sumbu y
k dalam arah sumbu z



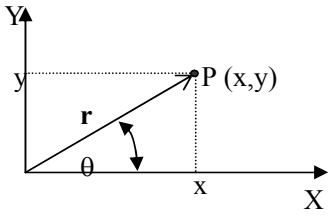
Misalkan ada sebuah vektor:
a = 2**i** + 3**j** + 3**k**
Artinya panjang a dalam arah sumbu x adalah 2 satuan, panjang dalam arah y adalah 3 satuan dan panjang dalam arah z adalah 3 satuan.

b. Vektor Posisi

Posisi suatu benda titik yang akan kita dibahas terletak dalam bidang XY, sehingga vector satuan yang digunakan hanya dua yaitu **i** dan **j.**

Jika sebuah benda titik terletak di titik P dengan koordinat x,y maka posisi titik tersebut dapat dinyatakan dalam vektor posisi:

$$\boxed{\vec{r} = \mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j}}$$



Panjang vektor posisi **r** dapat dihitung dengan persamaan:

$$\boxed{|\mathbf{r}| = r = \sqrt{x^2 + y^2}}$$

Arahnya (sudut yang dibentuk vektor r terhadap sumbu x positif) dapat dicari dengan persamaan:

$$\boxed{tgn\,\theta = \frac{y}{x} \;\; atau \;\; \theta = tgn^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)}$$

Contoh Soal 1:

Sebuah benda berada dalam bidang datar XOY pada koordinat (4,3). Tentukan:

a. Vektor posisi benda tersebut

b. Jarak benda dari sumbu koordinat (besar vektor)

c. Sudut yang dibentuk posisi benda terhadap sumbu X

Jawab:

a. Untuk koordinat (4,3) maka vektor posisinya adalah **r** = 4**i** + 3**j**

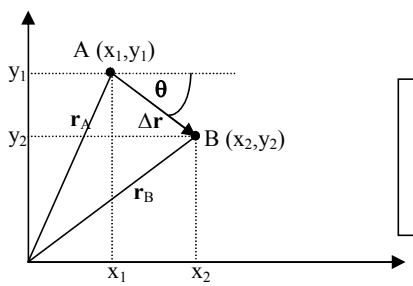
b. Panjang vektor : $r = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$

c. Arahnya adalah : $\theta = tgn^{-1}(y/x)$

$\theta = tgn^{-1}(3/4) = 36{,}86^0$

c. Perpindahan

Sebuah benda titik yang berada dalam bidang XY bergerak dari titik A dengan koordinat (x_1,y_1) menuju titik B dengan koordinat (x_2, y_2) dengan bentuk lintasan sembarang seperti pada gambar berikut:



Vektor posisi dititik A adalah:

$\mathbf{r}_A = x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j}$

Vektor posisi dititik B adalah:

$\mathbf{r}_B = x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j}$

Sehingga *perpindahan* dari titik A ke B adalah:

$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A$

$\Delta\mathbf{r} = (x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j}) - (x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j})$

$\Delta\mathbf{r} = (x_2 - x_1)\,\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\,\mathbf{j}$

atau $\Delta\mathbf{r} = \Delta x\,\mathbf{i} + \Delta y\,\mathbf{j}$

Besar perpindahan dari titik A ke B adalah:

$$\Delta r = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

Arah perpindahannya adalah:

$$tgn\,\theta = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$\theta = tgn^{-1}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$$

Contoh Soal 2:

Sebuah benda titik bergerak dalam bidang XOY dari titik P(2,4) menuju Q(6,3). Tentukan:

a. persamaan vektor posisi di titik P

b. persamaan vektor posisi di titik Q

c. vektor perpindahan benda tersebut dari P ke Q

d. besar perpindahannya

e. arah perpindahan.

Diket: P (2,4)

Q (6,3)

Dit: a. $\mathbf{r}_p$ b. $\mathbf{r}_Q$ c. $\Delta\mathbf{r}$ d. Δr e. θ

Jawab:

a. P (2,4) maka $\mathbf{r}_P = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$

b. Q (6,3) maka $\mathbf{r}_Q = 6\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$

c. $\Delta\mathbf{r} = (x_2 - x_1)\,\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\,\mathbf{j} = (6\text{-}2)\mathbf{i} + (3\text{-}4)\mathbf{j}$

$\Delta\mathbf{r} = 4\mathbf{i} - \mathbf{j}$

d. $\Delta r = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \sqrt{4^2 + (-1)^2}$

$= \sqrt{16+1}$

$= \sqrt{17} = 4{,}123$

e. $\theta = \text{tgn}^{-1}\,(\Delta y/\Delta x)$

$\theta = \text{tgn}^{-1}\,(-1/4)$

$\theta = \text{tgn}^{-1}\,(-\,0{,}25)$

$\theta = -14{,}036^0$

Contoh Soal 3:

Vektor posisi suatu benda dinyatakan oleh persamaan $\mathbf{r} = 3t^2\mathbf{i} - (t^2 + t)\,\mathbf{j}$, t dalam sekon dan r dalam meter. Tentukan besar perpindahan benda dari t = 1 sekon sampai t = 2 sekon.

Jawab:

Tentukan terlebih dulu vector posisi benda pada t = 1 sekon dan t = 2 sekon dengan memasukkan nilai t ke dalam persamaan **r**

Pada t = 1 sekon , maka $\mathbf{r}_1 = 3t^2\mathbf{i} - (t^2 + t)\,\mathbf{j}$

$\mathbf{r}_1 = 3.1^2\,\mathbf{i} - (1^2 + 1)\,\mathbf{j}$

$\mathbf{r}_1 = 3\,\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$

Pada t = 2 sekon, maka $\mathbf{r}_2 = 3t^2\mathbf{i} - (t^2 + t)\,\mathbf{j}$

$\mathbf{r}_2 = 3.2^2\mathbf{i} - (2^2 + 2)\,\mathbf{j}$

$\mathbf{r}_2 = 12\,\mathbf{i} - 6\mathbf{j}$

Vektor perpindahannya adalah:

$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$

$\Delta\mathbf{r} = (12\,\mathbf{i} - 6\mathbf{j}) - (3\,\mathbf{i} - 2\mathbf{j})$

$\Delta\mathbf{r} = (12\,\mathbf{i} - 3\mathbf{i}) + (-6\,\mathbf{j} + 2\mathbf{j})$

$\Delta\mathbf{r} = 9\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$

Besar vektor perpindahannya adalah:

$\Delta r = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \sqrt{9^2 + 4^2}$

$\Delta r = \sqrt{81+16}$

$\Delta r = \sqrt{97}\ meter$

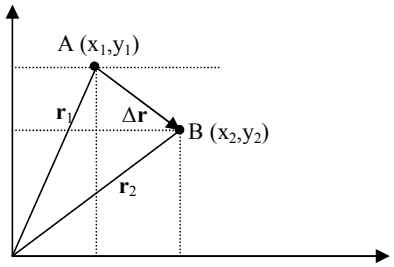
LATIHAN 1.1.

1. Sebuah benda berada dalam bidang XOY dan terletak pada suatu titik dengan koordinat (8,-11). Tentukan:
   a. Vektor posisi benda tersebut
   b. Jarak benda dari sumbu koordinat (besar vektor)
   c. Sudut yang dibentuk posisi benda terhadap sumbu X.
2. Sebuah benda titik bergerak dalam bidang XOY dari titik P(3,2) menuju Q(7,5). Tentukan:
   a. persamaan vektor posisi di titik P
   b. persamaan vektor posisi di titik Q
   c. vektor perpindahan benda tersebut dari P ke Q
   d. besar perpindahannya
   e. arah perpindahan.
3. Sebuah partikel bergerak dengan persamaan vector posisi : $\mathbf{r} = (2t^2\text{-}t)\mathbf{i} + (t^3 + t)\mathbf{j}$ dalam satuan SI. Tentukan besar perpindahan partikel dari t = 1 sekon sampai t = 2 sekon.

2. Kecepatan

Kecepatan merupakan besaran vektor yang menyatakan laju perubahan posisi (perpindahan) terhadap waktu. Selama benda bergerak, mungkin saja kecepatannya berubah baik besar maupun arahnya. Akan tetapi, kita dapat menyatakan kecepatan benda dalam interval waktu tertentu sebagai *kecepatan rata-rata* dan kecepatan benda pada suatu titik tertentu selama geraknya sebagai *kecepatan sesaat*.

a. Kecepatan Rata-rata



Pada saat benda bergerak dalam ruang, lintasannya secara umum berbentuk kurva. Selama interval waktu Δt benda bergerak dari titik A dengan vektor posisi $\mathbf{r}_1$ menuju titik B dengan vektor posisi $\mathbf{r}_2$. Perubahan posisi (perpindahan) selama interval waktu tersebut adalah

$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$

Kecepatan rata-rata adalah hasil bagi antara perpindahan dengan interval waktu. Secara matematis dituliskan dalam persamaan:

$$\mathbf{v}_r = \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{t_2 - t_1}$$

Apabila dinyatakan dalam vektor satuan, maka :

$$\mathbf{v}_r = \frac{\Delta x\mathbf{i} + \Delta y\mathbf{j}}{\Delta \mathrm{t}} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\mathbf{i} + \frac{\Delta \mathrm{y}}{\Delta \mathrm{t}}\mathbf{j}$$

$$\mathbf{v}_\mathbf{r} = v_{rx}\mathbf{i} + \mathrm{v}_{\mathrm{ry}}\mathbf{j}$$

Besar kecepatan rata-rata dapat dihitung dengan persamaan:

$|\mathbf{v}_r| = v_r = \sqrt{v_{rx}^{\ 2} + v_{ry}^{\ 2}}$ dan arah kecepatan rata-rata : $\theta = \mathrm{tgn}^{-1}\left(\frac{v_{ry}}{v_{rx}}\right)$

dengan: $\mathbf{v}_r$ = vektor kecepatan rata-rata
v_{rx} = komponen kecepatan rata-rata pada sumbu x (m/s)
v_{ry} = komponen kecepatan rata-rata pada sumbu y (m/s)

Contoh Soal 4:
Sebuah partikel berpindah dari titik (3,4) meter menuju titik (-5,10) dalam selang waktu 4 sekon. Tentukan (a) persamaan kecepatan rata-rata, (b) besar kecepatan rata-rata dan (c) arah kecepatan rata-rata partikel.

Diket: Koordinat titik awal (3,4)
Koordinat titik akhir (-5,10)
Dit: (a) $\mathbf{v}_r$ (b) v_r (c) θ

Jawab:
(a) Persamaan vektor kecepatan rata-ratanya adalah:

$$\mathbf{v}_r = \frac{\Delta x}{\Delta t} i + \frac{\Delta y}{\Delta t}$$

$$\mathbf{v}_r = \frac{(-5-3)}{4}\mathbf{i} + \frac{(10-4)}{4}\mathbf{j} \Rightarrow \mathbf{v}_r = -2\mathbf{i} + 1{,}5\mathbf{j}$$

(b) Besar (nilai) kecepatan rata-rata:

$$|\mathbf{v}_r| = v_r = \sqrt{v_{rx}^{\ 2} + v_{ry}^{\ 2}}$$

$$v_r = \sqrt{(-2)^2 + 1{,}5^2}$$

$$v_r = \sqrt{4 + 2{,}25}$$

$$v_r = \sqrt{6{,}25} = 2{,}5\, m/s$$

(c) Arahnya:

$$\theta = \text{tgn}^{-1}\left(\frac{v_{ry}}{v_{rx}}\right)$$

$$\theta = \text{tgn}^{-1}\left(\frac{1{,}5}{-2}\right) = \text{tgn}^{-1}(-0{,}75)$$

$$\theta = 143{,}13^0$$

Contoh Soal 5:
Sebuah partikel bergerak dengan vektor posisi $\mathbf{r} = (t^2\text{-}3t)\mathbf{i} + (t^2\text{-}2)\mathbf{j}$, r dalam meter dan t dalam sekon.Jika partikel bergerak dari t = 1 sekon sampai dengan t = 2 sekon, tentukan (a) persamaan kecepatan rata-rata, (b) besar kecepatan rata-rata dan (c) arah kecepatan rata-rata partikel.
Diket: Persamaaan posisi $\mathbf{r} = (t^2\text{-}3t)\mathbf{i} + (t^2\text{-}2)\mathbf{j}$
Dit: (a) $\mathbf{v}_r$ (b) v_r (c) θ

Jawab:
(a) Untuk menetukan persamaan vektor kecepatan rata-rata, terlebih dahulu harus ditentukan vektor perpindahannya (Δ**r**)
Untuk t = 1 sekon, maka $\mathbf{r}_1 = (t^2\text{-}3t)\mathbf{i} + (t^2\text{-}2)\mathbf{j}$
$\mathbf{r}_1 = (1^2\text{-}3.1)\mathbf{i} + (1^2 - 2)\mathbf{j}$
$\mathbf{r}_1 = -2\mathbf{i} - \mathbf{j}$
Untuk t = 2 sekon, maka $\mathbf{r}_2 = (t^2\text{-}3t)\mathbf{i} + (t^2\text{-}2)\mathbf{j}$
$\mathbf{r}_2 = (2^2\text{-}3.2)\mathbf{i} + (2^2\text{-}2)\mathbf{j}$
$\mathbf{r}_2 = -2\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$

Sehingga: $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$

$\Delta\mathbf{r} = (-2\,\mathbf{i} + 2\mathbf{j}) - (-2\,\mathbf{i} - \mathbf{j})$

$\Delta\mathbf{r} = (-2\,\mathbf{i} + 2\,\mathbf{i}) + (2\mathbf{j} + \mathbf{j})$

$\Delta\mathbf{r} = 0\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$

$\Delta\mathbf{r} = 3\mathbf{j}$

Dengan demikian: $\mathbf{v}_r = \dfrac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} = \dfrac{3\mathbf{j}}{2-1}$

$\mathbf{v}_r = 3\mathbf{j}$

(b) Besar vektor kecepatan rata-ratanya adalah:

$|\mathbf{v}_r| = v_r = \sqrt{v_{rx}^{\ 2} + v_{ry}^{\ 2}}$

$v_r = \sqrt{0^2 + 3^2}$

$v_r = \sqrt{0+9}$

$v_r = \sqrt{9} = 3\,m/s$

(c) Arahnya:

$\theta = \text{tgn}^{-1}\left(\dfrac{v_{ry}}{v_{rx}}\right)$

$\theta = \text{tgn}^{-1}\left(\dfrac{3}{0}\right) = \text{tgn}^{-1}(\infty)$

$\theta = 90^0$

b. Kecepatan Sesaat

Kecepatan sesaat dapat diartikan sebagai laju perubahan posisi sesaat yaitu limit kecepatan rata-rata untuk selang waktu mendekati nol. Secara matematis dituliskan dalam persamaan:

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \mathbf{v}_r = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\mathbf{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\mathbf{j}\right)$$

$$\mathbf{v} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} \quad atau\ \mathbf{v} = \frac{dr}{dt}$$

$$\mathbf{v} = v_x\,\mathbf{i} + v_y\,\mathbf{j}$$

dengan:

$\mathbf{v}$ = vektor kecepatan sesaat (m/s)

v_x = komponen kecepatan sesaat pd sumbu x (m/s)

v_y = komponen kecepatan sesaat pd sumbu y (m/s)

Jadi persamaan kecepatan sesaat adalah turunan pertama dari persamaan posisi

Untuk mencari besar dan arah kecepatan sesaat sama dengan pada kecepatan rata-rata.

Contoh Soal 6:

Sebuah partikel bergerak dengan vektor posisi $\mathbf{r} = (t^2\text{-}3t)\mathbf{i} + (t^2\text{-}2)\mathbf{j}$, r dalam meter dan t dalam sekon.Tentukan kecepatan sesaat partikel pada t = 2 sekon.

Diket: persamaan posisi $\mathbf{r} = (t^2\text{-}3t)\mathbf{i} + (t^2\text{-}2)\mathbf{j}$

Dit: v pada t = 2 sekon

Jawab:

$\mathbf{v} = \dfrac{dr}{dt} = \dfrac{d}{dt}\left((t^2 - 3t)\mathbf{i} + (t^2 - 2)\mathbf{j}\right)$

$\mathbf{v} = (4t - 3)\,\mathbf{i} + (2t)\,\mathbf{j}$

Pada $t = 2$ sekon maka :

$\mathbf{v} = (4.2 - 3)\mathbf{i} + (2.2)\mathbf{j}$

$\mathbf{v} = 5\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$

Besar kecepatan sesaat pada t = 2 sekon:

$v = \sqrt{v_x^{\ 2} + v_y^{\ 2}}$

$v = \sqrt{5^2 + 4^2}$

$v = \sqrt{25 + 16}$

$v = \sqrt{41}\ m/s$

c. *Menentukan persamaan posisi dari fungsi kecepatan*

Apabila kecepatan benda setiap saat sebagai fungsi waktu v(t), posisi awal (r_0) dan waktu awal gerakan (t) diketahui, maka persamaan posisi sebagai fungsi t dapat ditentukan dengan metode integral.

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{dr}}{\mathbf{dt}} \text{ atau } d\mathbf{r} = \mathbf{v}\,dt$$

$$\int \mathrm{dr} = \int \mathbf{v}\ \mathrm{dt}$$

Atau: $\boxed{r = \int \mathbf{v}\,dt}$

Contoh Soal 7:

Sebuah benda bergerak sepanjang sumbu x dengan persamaan kecepatan v = -2t + 8 m/s. Jika pada t = 0 posisi benda adalah x = -5 meter , tentukan persamaan posisi benda sebagai fungsi t dan hitung posisi benda pada t = 4 sekon.

Jawab:

$$x = \int v\,dt = \int (-2t + 8)\,dt$$

$$x = \int -2t\,dt + \int 8\,dt$$

$$x = -t^2 + 8t + C$$

Untuk mentukan nilai C, dalam soal diketahui bahwa pada t = 0 sekon , x = - 5 meter,

sehingga : $-5 = -0^2 + 8.0 + C$ atau $C = -5$

Maka persamaan umum posisi benda adalah :

$x = -t^2 + 8t - 5$

Untuk t = 4 sekon, posisi benda adalah :

$x = -4^2 + 8.2 - 5 = -5\,meter$

<u>LATIHAN 1.2</u>

1. Sebuah partikel bergerak dengan vektor posisi **r** = ($2t^2$ – t) **i** + (t^3 + t) **j,** r dalam meter dan t dalam sekon. Tentukan:
   a. Kecepatan rata-rata partikel dari t = 1 sekon sampai dengan t = 2 sekon.
   b. Persamaan kecepatan sesaatnya.
   c. Besar kecepatan sesaat pada t = 2 sekon.
2. Sebuah benda bergerak lurus sepanjang sumbu X dengan persamaan posisi x = ($2t^2$-t+10) m. Tentukan:
   a. Kecepatan rata-rata partikel dari t = 2 sekon sampai dengan t = 4 sekon.
   d. Persamaan kecepatan sesaatnya.
   e. Besar kecepatan sesaat pada t = 4 sekon.
3. Sebuah partikel bergerak dengan vektor posisi **r** = ($8t^2$-3t+6) **i** + ($2t^2$+4t-2)**j**, r dalam meter dan t dalam sekon. Tentukan:
   a. Persamaan kecepatan sesaatnya.
   b. Besar kecepatan sesaat partikel pada t = 4 sekon.
4. Sebuah benda bergerak sepanjang sumbu x dengan persamaan kecepatan v = 2t + 8 m/s. Jika pada t = 0 sekon posisi benda x = 10 meter, tentukan persamaan posisi benda sebagai fungsi t dan hitung posisi benda pada t = 4 sekon.

3. Percepatan

Percepatan merupakan besaran vector yang menyatakan laju perubahan kecepatan terhadap waktu. Seperti halnya kecepatan, kita mengenal adanya percepatan rata-rata dan percepatan sesaat. Akan tetapi dalam banyak hal kita akan membatasi pembahasan pada percepatan yang nilainya konstan sehingga percepatan rata-rata sama dengan percepatan sesaat dan dengan singkat disebut percepatan. Gerak benda yang bergerak dengan percepatan konstan disebut dengan *gerak lurus beraturan*, dan hal ini sudah dipelajari di kelas X.

a. Percepatan rata-rata

Misalkan sebuah benda selama selang waktu t , benda tersebut bergerak dari titik P_1 dengan kecepatan $\mathbf{v_1}$ menuju titik P_2 sehingga kecepatannya menjadi $\mathbf{v_2}$. Perubahan kecepatan selama interval waktu tersebut adalah:

$\Delta\mathbf{v} = \mathbf{v_2} - \mathbf{v_1}$

Percepatan rata-rata adalah hasil bagi antara perubahan kecepatan dengan interval waktu. Secara matematis dituliskan:

$$\boxed{\mathbf{a}_r = \frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1}{t_2 - t_1}} \quad atau\ \mathbf{a}_r = \frac{(v_{x2}\mathbf{i} + v_{y2}\mathbf{j}) - (v_{x1}\mathbf{i} + v_{y1}\mathbf{j})}{t_2 - t_1}$$

$$\mathbf{a}_r = \frac{(v_{x2} - v_{x1})\mathbf{i} + (v_{y2} - v_{y1})\mathbf{j}}{\Delta t} = \frac{\Delta v_x\ \mathbf{i} + \Delta v_y\ \mathbf{j}}{\Delta t}$$

$$\mathbf{a}_r = \frac{\Delta v_x}{\Delta t}\mathbf{i} + \frac{\Delta v_y}{\Delta t}\mathbf{j}$$

$$\mathbf{a}_r = a_{rx}\mathbf{i} + a_{ry}\mathbf{j}$$

$\mathbf{a}_r$ = vector percepatan rata-rata (m/s^2)
a_{rx} = komponen percepatan rata-rata pada sumbu x (m/s^2)
a_{ry} = komponen percepatan rata-rata pada sumbu y (m/s^2)

Besar percepatan rata-ratanya adalah: $|\mathbf{a}_r| = a_r = \sqrt{a_{rx}^{\ 2} + a_{ry}^{\ 2}}$

Arahnya: $\theta = tgn^{-1}\left(\frac{a_{ry}}{a_{rx}}\right)$

b. Percepatan Sesaat

Percepatan sesaat didefinisikan sebagai laju perubahan kecepatan sesaat, yaitu limit kecepatan rata-rata untuk selang waktu mendekati nol. Secara matematis dituliskan:

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \mathbf{a}_r \quad atau$$

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\Delta v_x}{\Delta t}\mathbf{i} + \frac{\Delta v_y}{\Delta t}\mathbf{j}\right)$$

$$\mathbf{a} = \frac{dv_x}{dt}\mathbf{i} + \frac{dv_y}{dt}\mathbf{j} \quad atau\ \boxed{\mathbf{a} = \frac{dv}{dt}}$$

$$\mathbf{a} = a_x\ \mathbf{i} + a_y\ \mathbf{j}$$

$\mathbf{a}$ = vector percepatan sesaat (m/s^2)
a_x = komponen percepatan sesaat pada sumbu x (m/s^2)
a_y = komponen percepatan sesaat pada sumbu y (m/s^2)

Jadi persamaan percepatan sesaat adalah turunan pertama dari persamaan kecepatan sesaat sebagai fungsi waktu (t).

Besar dan arah percepatan sesaat dapat dicari dengan persamaaan

$$|\mathbf{a}| = a = \sqrt{a_x^{\ 2} + a_y^{\ 2}} \qquad dan \quad \theta = tgn^{-1}\left(\frac{a_y}{a_x}\right)$$

c. Menentukan persamaan kecepatan dari persamaan percepatan

Persamaan kecepatan sebagai fungsi t dapat ditentukan dari persamaan percepatan dengan metode integral yaitu:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \quad atau\ d\mathbf{v} = \mathbf{a}\,dt$$

$$\int d\mathbf{v}\,dt = \int \mathbf{a}\,dt \quad atau \qquad v = \int \mathbf{a}\,dt$$

Contoh Soal 8:

Sebuah benda bergerak dengan persamaan kecepatan $\mathbf{v} = 2t^2\mathbf{i} + 5t\,\mathbf{j}$ m/s. Tentukan:

a. Persamaan percepatan rata-rata dari t = 1 sekon sampai t = 2 sekon.
b. besar percepatan rata-rata dari t = 1 sekon sampai t = 2 sekon.
c. Persamaan percepatan sesaat sebagai fungsi waktu (t).
d. Besar percepatan rata-rata pada t= 2 sekon.

Diket: $\mathbf{v} = 2t^2\mathbf{i} + 5t\,\mathbf{j}$ m/s

Dit : a. $\mathbf{a}_r$ dari t=1 s/d t =2 sekon b. a_r dari t=1 s/d t =2 sekon c. persamaan **a** d. a pd t = 2 s

Jawab:

a. Sebelum menentukan persamaan $\mathbf{a}_r$ terlebih dahulu kita tentukan $\mathbf{v}_1$ dan $\mathbf{v}_2$:

   Pada t = 1 sekon, $\mathbf{v}_1 = 2t^2\mathbf{i} + 5t\,\mathbf{j} = 2.\ 1^2\,\mathbf{i} + 5.1\,\mathbf{j}$

   $\mathbf{v}_1 = 2\,\mathbf{i} + 5\,\mathbf{j}$

   Pada t = 2 sekon, $\mathbf{v}_1 = 2t^2\mathbf{i} + 5t\,\mathbf{j} = 2.\ 2^2\,\mathbf{i} + 5.2\,\mathbf{j}$

   $\mathbf{v}_1 = 8\,\mathbf{i} + 10\,\mathbf{j}$

   Sehingga persamaan percepatan rata-ratanya:

$$\mathbf{a}_r = \frac{\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1}{t_2 - t_1} = \frac{(8\,\mathbf{i} + 10\,\mathbf{j}) - (2\,\mathbf{i} + 5\,\mathbf{j})}{2-1}$$

$$\mathbf{a}_r = \frac{(8-2)\mathbf{i} + (10-5)\mathbf{j}}{1} = 6\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$$

b. Besar percepatan rata-rata dari t = 1 sekon sampai t = 2 sekon adalah:

$$|\mathbf{a}_r| = a_r = \sqrt{a_{rx}^{\ 2} + a_{ry}^{\ 2}} = \sqrt{6^2 + 5^2}$$

$$a_r = \sqrt{36 + 25} = \sqrt{61} \quad m/s^2$$

c. Persamaan percepatan sesaatnya adalah:

$$\mathbf{a} = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(2t^2\mathbf{i} + 5t\,\mathbf{j}\right)$$

$$\mathbf{a} = 4t\,\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$$

d. Pada t = 2 sekon percepatan sesaatnya adalah:

   $\mathbf{a} = 4t\,\mathbf{i} + 5\mathbf{j} = 4.\ 2\,\mathbf{i} + 5.2\,\mathbf{j} = 8\mathbf{i} + 10\mathbf{j}$

   Besarnya adalah: $a = \sqrt{8^2 + 10^2} = \sqrt{64 + 100} = \sqrt{164}\ m/s^2$

Contoh Soal 9:

Sebuah benda bergerak lurus dengan percepatan a = (2t + 4) m/s^2 . Pada saat t = 0 sekon kecepatan partikel sama dengan 2 m/s. Tentukan:

a. Percepatan partikel pada t =4 sekon
b. Persamaan kecepatan partikel sebagai fungsi t
c. Kecepatan partikel pada t = 2 sekon.

Jawab:

a. Pada t = 4 sekon, percepatan partikel adalah: a = 2.4 + 4 = 12 m/s^2
b. Persamaan kecepatan partikel:

$$v = \int a\, dt = \int (2t + 4)\, dt$$
$$v = t^2 + 4t + C$$
$$Pada\ t = 0, v = 2\ m/s, sehingga$$
$$2 = 0^2 + 4.0 + C \quad \Rightarrow C = 2$$
$$Maka\ persamaan\ kecepa\text{tan}\ partikel\ sebagai\ fungsi\ t\ dapat\ dituliskan:$$
$$v = t^2 + 4t + 2$$

c. Pada t = 2 sekon, kecepatan partikel adalah:
   v = t^2 + 4t +2 = 2^2 + 4.2 +2 = 14 m/s

<u>SOAL LATIHAN 1.3</u>

1. Persamaan kecepatan sebuah partikel adalah v = 2t **i** + (3t^2 + 1)**j** m/s. Tentukan:
   a. Persamaan percepatan rata-rata dari t = 1 sekon sampai t = 3 sekon.
   b. besar percepatan rata-rata dari t = 1 sekon sampai t = 3 sekon.
   c. Persamaan percepatan sesaat sebagai fungsi waktu (t).
   d. Besar percepatan rata-rata pada t = 3 sekon.
2. Persamaan percepatan sebuah partikel sebagai fungsi waktu dinyatakan oleh persamaan a = 3t^2 **i** + 4t **j.** Jika partikel mula-mula diam, tentukan:
   a. Besar percepatan partikel pada t =2 sekon
   b. Persamaan kecepatan partikel sebagai fungsi t
   c. Besar kecepatan partikel pada t = 3 sekon.